МБВСОУ «Центр образования»
Г. Биробиджан, 2012 г.

Производная и её геометрический смысл

Методическая разработка по зачетному разделу «Производная и её геометрический смысл», IV сессия, 11 класс.

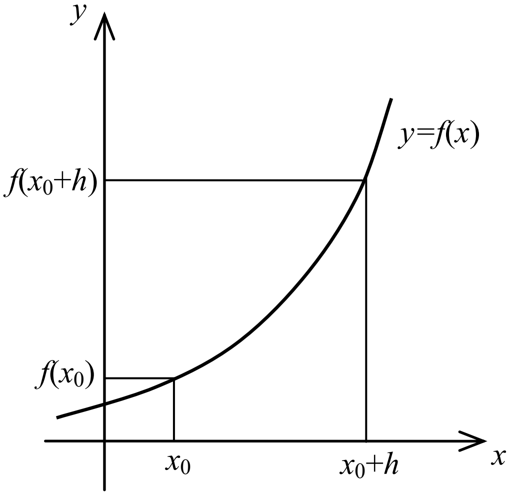
Учитель: Мошкина В.А.
2012 г.

Содержание

1. **Определение производной.**
2. **Производная степени.**
3. **Правила дифференцирования**
4. **Производные элементарных функций.**
5. **Геометрический смысл производной.**

У каждого человека есть определенный кругозор. Когда этот кругозор сужается до бесконечности малого то он обращается в точку. Тогда человек и говорит, что это есть его точка зрения.
Д.Гильберт

Понятие производной является одним из ведущих понятий математики. Введем это понятие.



Пусть дана функция $y = f(x)$. На оси Ox возьмем точку x_0. Затем «подвинем» эту точку на отрезок h. Получим точку $x_0 + h$.
Отрезок h назовем *приращением аргумента*.
Значение функции в точке x_0 равно $f(x_0)$.
Значение функции в точке $x_0 + h$ равно $f(x_0 + h)$.
Тогда разность $f(x_0 + h) - f(x_0)$ назовем *приращением функции.*
Разделим приращение функции $f(x_0 + h) - f(x_0)$ на приращение аргумента h.
Дробь $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ будем называть *разностным отношением.*
Если существует предел этой дроби при $h \to 0$, то этот предел называют *производной* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$.

Определение: Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел разностного отношения при $h \to 0$, т. е..

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Пользуясь определением производной, были выведены следующие формулы:

1. $C' = 0$, т. е. производная числа равна нулю:

$5' = 0$; $(-2)' = 0$; $\left(\frac{1}{4}\right)' = 0$.

2. $x' = 1$; 3. $(x^2)' = 2x$; 4. $(x^3)' = 3x^2$.

Производная степени при любом действительном показателе p вычисляется по формуле:

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

Примеры: 1). $(x^7)' = 7x^6$; 2). $(x^{-4})' = -4x^{-5}$;

3). $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Правила дифференцирования

1. Производная суммы равна сумме производных:

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x).$$

Например, $(x^3 + x)' = (x^3)' + (x)' = 3x^2 + 1$.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$$

Например, $(4x^3)' = 4(x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$.

Задача. Найти производную функции: $y = 2x^3 - 0{,}5x^2 + 3x - 3$.

Решение:

$y' = (2x^3 - 0.5x^2 + 3x - 3)' = (2x^3)' + (-0{,}5x^2)' + (3x)' + (-3)' = 6x^2 - x + 3$.

3. Производная произведения $f(x) \cdot g(x)$ выражается формулой:

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Задача. Найти производную функции $y = (2x + 3) \cdot (5 - x^2)$.

Решение.

$$y' = \left((2x+3)\cdot(5-x^2)\right)' = (2x+3)'\cdot(5-x^2) + (2x+3)\cdot(5-x^2)' =$$
$$= 2(5-x^2) + (2x+3)(-2x) = 10 - 2x^2 - 4x^2 - 6x = 10 - 6x - 6x^2.$$

4. Производная частного $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ двух функций вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Задача. Найти производную функции: 1). $y = \dfrac{2x^3}{3-4x}$.

Решение. $$y' = \left(\frac{2x^3}{3-4x}\right)' = \frac{(2x^3)'(3-4x) - 2x^3(3-4x)'}{(3-4x)^2} =$$
$$= \frac{6x^2(3-4x) - 2x^3(-4)}{(3-4x)^2} = \frac{18x^2 - 24x^3 + 8x^3}{(3-4x)^2} =$$
$$= \frac{18x^2 - 16x^3}{(3-4x)^2} = \frac{2x^2(9-8x)}{(3-4x)^2}.$$

2). $y = \dfrac{2-x}{5+3x}$.

Решение. $$y' = \left(\frac{2-x}{5+3x}\right)' = \frac{(2-x)'(5+3x) - (2-x)(5+3x)'}{(5+3x)^2} =$$
$$= \frac{-(5+3x) - (2-x)3}{(5+3x)^2} = \frac{-5-3x-6+3x}{(5+3x)^2} = \frac{-11}{(5+3x)^2}.$$

5. Производная сложной функции $f(g(x))$ вычисляется по формуле:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Задача. Найти производную функции $y = (3x+4)^2$.

Решение. $$y' = \left((3x+4)^2\right)' = 2(3x+4)\cdot(3x+4)' = 2(3x+4)(3) =$$
$$= 6(3x+4) = 18x + 24.$$

Производные элементарных функций

1. $(\sin x)' = \cos x$.
2. $(\cos x)' = -\sin x$.
3. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$.
4. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in Z$.
5. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1$.
6. $(e^x)' = e^x$.
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$.
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$.

Задача. Найти производные ($f'(x)$) следующих функций:

1) $f(x) = \sin 5x$; 2) $f(x) = \cos^2 x$; 3) $f(x) = tg\, 4x$;

4) $f(x) = ctg\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$; 5) $f(x) = 2^{3-x}$;

6) $f(x) = e^{2x}$; 7) $f(x) = \log_3 (x^2 + 4)$;

8) $f(x) = \ln x^2$.

Решение. 1) $f'(x) = (\sin 5x)' = \cos 5x \cdot (5x)' = \cos 5x \cdot 5 = 5\cos 5x$.

2) $f'(x) = (\cos^2 x)' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \sin x = \sin 2x$.

3) $f'(x) = (tg\, 4x)' = \dfrac{1}{\cos^2 4x} \cdot (4x)' = \dfrac{1}{\cos^2 4x} \cdot 4 = \dfrac{4}{\cos^2 4x}$.

4) $f'(x) = \left(ctg\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)} \cdot \left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)' =$

$$= -\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)} \cdot (-1) = \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)}.$$

5) $f'(x) = \left(2^{3-5x}\right)' = 2^{3-5x} \cdot \ln 2 \cdot (3 - 5x)' =$

$= 2^{3-5x} \cdot \ln 2 \cdot (-5) = -5 \cdot 2^{3-5x} \cdot \ln 2.$

6) $f'(x) = \left(e^{2x}\right)' = e^{2x} \cdot (2x)' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}.$

7) $f'(x) = \left(\log_3 (x^2 + 4)\right)' = \dfrac{1}{(x^2 + 4)\ln 3} \cdot (x^2 + 4)' =$

$= \dfrac{1}{(x^2 + 4)\ln 3} \cdot 2x = \dfrac{2x}{(x^2 + 4)\ln 3}.$

8) $f'(x) = \left(\ln x^2\right)' = \dfrac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}.$

Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 или тангенсу угла наклона касательной к графику в точке x_0.

$f'(x_0) = k; \qquad f'(x_0) = tg\alpha.$

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ - уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$.

Задача 1. Найти угол наклона касательной к графику функции $y = 3\sin\dfrac{1}{3}x$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. 1). Угол наклона касательной найдем из формулы $f'(x_0) = tg\alpha$.

2). Найдем производную $f'(x) = \left(3\sin\dfrac{1}{3}x\right)' = 3\cos\dfrac{1}{3}x \cdot \left(\dfrac{1}{3}x\right)' =$

$= 3\cos\dfrac{1}{3}x \cdot \dfrac{1}{3} = 3 \cdot \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{1}{3}x = \cos\dfrac{1}{3}x.$

3). Вычислим значение производной в точке $x_0 = 0$.

$$f'(x_0) = f'(0) = \cos\frac{1}{3}\cdot 0 = \cos 0 = 1.$$

4). $tg\,\alpha = 1, \qquad \alpha = \dfrac{\pi}{4}.$

Ответ: $\alpha = \dfrac{\pi}{4}.$

Задача 2. Найти уравнение касательной к графику функции

$y = 6x - 3x^2$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. 1). $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ - уравнение касательной.

2). $f(x_0) = f(2) = 6\cdot 2 - 3\cdot 2^2 = 12 - 3\cdot 4 = 12 - 12 = 0$.

3). $f'(x) = (6x - 3x^2)' = 6 - 6x$.

4). $f'(x_0) = f'(2) = 6 - 6\cdot 2 = 6 - 12 = -6$.

5). Подставим числовые значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$ и x_0 в уравнение касательной: $y = 0 + (-6)\cdot(x - 2) =$
$= -6x + 12$.

Ответ: $y = -6x + 12$ - уравнение касательной.