

**МБВСОУ «Центр образования» г. Биробиджана
2012 год**

Методическое пособие по теме:

**«Корень n -й степени из
действительного числа»**

**Учитель математики:
Мошкина Валентина Александровна**

Содержание

1. Понятие корня n – й степени.
2. Корень из произведения и произведение корней.
3. Корень из частного и частное корней.
4. Корень из степени и степень корня.
5. Корень степени m из корня степени n .
6. Преобразование иррациональных выражений.
7. Вынесение множителя из-под корня.
8. Внесение множителя под корень.
9. Тест.
10. Ответы.

1. Понятие корня n-й степени

Определение 1. Корнем n-й степени, где n – натуральное число, отличное от 1, из действительного числа a называется такое действительное число b , n-я степень которого равна a .

Корень n-й степени из числа a обозначается символом $\sqrt[n]{a}$, где n – показатель корня, a – подкоренное выражение.

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ так как } b^n = a$$

Например, $\sqrt[3]{8} = 2$, так как $2^3 = 8$.

$$\sqrt[5]{-32} = -2, \text{ так как } (-2)^5 = -32.$$

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3, \text{ так как } 3^4 = 81 \text{ и } (-3)^4 = 81.$$

$$\sqrt[n]{0} = 0. \quad \sqrt[n]{1} = 1.$$

Корень четной степени из отрицательного числа не существует. Например, $\sqrt{-1}$ - не существует. $\sqrt[4]{-1}$ - не существует.

Согласно определению можно записать такое равенство

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \quad \left(\sqrt[n]{1}\right)^n = 1$$

Определение 2. Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b , n-я степень которого равна a .

Обозначается арифметический корень n-й степени так же:

$$\sqrt[n]{a} = b, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad n > 1 \text{ – натуральное число.}$$

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут \sqrt{a} и называют арифметическим квадратным корнем.

$\sqrt[3]{a}$ называют арифметическим кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идет о арифметическом корне степени n , коротко говорят «корень n -й степени».

Примеры. Вычислить. 1) $\sqrt[3]{27}$; 2) $\sqrt[4]{16}$; 3) $\sqrt[5]{32}$; 4) $\sqrt[3]{1}$; 5) $\sqrt[10]{0}$.

Решение. 1) $\sqrt[3]{27}=3$, так как $3^3=27$.

2) $\sqrt[4]{16}=2$, так как $2^4=16$.

3) $\sqrt[5]{32}=2$, так как $2^5=32$.

4) $\sqrt[3]{1}=1$, так как $1^3=1$.

5) $\sqrt[10]{0}=0$, так как $0^{10}=0$.

Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел.

Арифметический корень нечетной степени существует из любого числа.

Например, а) $\sqrt[3]{-\overline{4}} = -\sqrt[3]{64} = -4$.

б) $\sqrt[3]{-\overline{25}} = -\sqrt[3]{125} = -5$.

в) $\sqrt[4]{-\overline{6}}$ - не имеет смысла.

Непосредственно из определения арифметического корня n -й степени следует:

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$;

2) $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = a$, если $a \geq 0$, $-a$, если $a < 0$, где $k \in \mathbb{N}$

2. Корень из произведения и произведение корней.

Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$.

И наоборот, поменяв местами левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней n -й степени.

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \text{ где } a \geq 0, b \geq 0$$

Пример 1. Вычислить: а) $\sqrt[3]{125} \times \sqrt{0,027}$; б) $\sqrt[4]{0,0081} \times \sqrt{6}$;

в) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{500}$ г) $\sqrt[4]{324} \times \sqrt[4]{4}$.

Решение: а) $\sqrt[3]{125} \times \sqrt{0,027} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt{0,027} = 5 \times 0,3 = 1,5$;

б) $\sqrt[4]{0,0081} \times \sqrt{6} = \sqrt[4]{0,0081} \times \sqrt{16} = 0,3 \times 2 = 0,6$;

в) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{500} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt{100} = \sqrt{1000} = 10$;

г) $\sqrt[4]{324} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{324} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{1296} = 6$.

Пример 2. Найти значение выражения:

1) $\left(\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} \right)^2$.

2) $\sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}} \times \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Решение: 1) $\left(\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} \right)^2 =$

$$= \left(\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \right)^2 + 2\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \times \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \left(\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} \right)^2 =$$

$$= 7 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{\left(7 + 2\sqrt{10} \right) \times \left(7 - 2\sqrt{10} \right)} + 7 - 2\sqrt{10} =$$

$$= 14 + 2\sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{10} \right)^2} = 14 + 2\sqrt{49 - 4 \times 10} = 14 + 2\sqrt{9} =$$

$$= 14 + 2 \times 3 = 14 + 6 = 20.$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \sqrt[3]{4 + \sqrt{2}} \times \sqrt{4 - \sqrt{2}} &= \sqrt[3]{(4 + \sqrt{2}) \times (4 - \sqrt{2})} = \\
 &= \sqrt[3]{4^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{16 - 2} = \sqrt[3]{8} = 2.
 \end{aligned}$$

3. Корень из частного и частное корней

$$\text{Если } a \geq 0 \text{ и } b > 0, \text{ то } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$\text{И наоборот, } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \geq 0, b > 0.$$

$$\text{Пример 1. а) } \sqrt[3]{\frac{125}{1000}}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{\frac{625}{16}}; \quad \text{в) } \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}.$$

$$\text{Решение: а) } \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

$$\text{б) } \sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

$$\text{Пример 2. Вычислить: а) } \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}; \quad \text{б) } \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}.$$

$$\text{Решение: а) } \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3;$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

4. Корень из степени и степень корня.

Если $a > 0$, то $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$.

И наоборот, $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$, где $a > 0$.

Пример 1. Вычислить: а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0,5^{10}}$.

Решение: а) $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = (5^3)^1 = 5^3 = 125$.

б) $\sqrt[5]{0,5^{10}} = \sqrt[5]{(0,5^5)^2} = (0,5^5)^{\frac{2}{5}} = 0,5^2 = 0,25$.

Пример 2. Упростить выражение: $(\sqrt{1+\sqrt{2}})^2$.

Решение: $(\sqrt{1+\sqrt{2}})^2 = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt{1^2 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} =$
 $= \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Пример 3. Упростить выражение: а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[4]{a^{20}}$.

Решение: а) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$.

б) $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = a^5$.

5. Корень степени m из корня степени n .

Если $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

И наоборот, $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, где $a \geq 0$

Пример 1. Упростить выражение: а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$.

Решение: а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4 \times 3]{2} = \sqrt[12]{2}$.

б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3 \times 2]{5} = \sqrt[6]{5}$.

Пример 2. Вычислить: а) $\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt[4]{625}$.

Решение: а) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3 \times 2]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

б) $\sqrt[4]{625} = \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5$.

6. Преобразование иррациональных выражений.

Задание 1. Найти значение выражения: а) $\sqrt[5]{\frac{3^{10} \times 5^5}{7^{10}}}$; б) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12} \times 5^6}}$.

Решение: а)
$$\begin{aligned} \sqrt[5]{\frac{3^{10} \times 5^5}{7^{10}}} &= \frac{\sqrt[5]{3^{10}} \times \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{2^5} \times \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{2^5}} = \\ &= \frac{3^2 \times 5}{7^2} = \frac{9 \times 5}{49} = \frac{45}{49}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12} \times 5^6}} &= \frac{\sqrt[6]{9^9}}{\sqrt[6]{2^{12} \times 5^6}} = \frac{\sqrt[6]{3^{18}}}{\sqrt[6]{2^2 \times 5^6}} = \\
 &= \frac{\sqrt[6]{3^{18}}}{2 \times 5} = \frac{\sqrt[6]{3^3}}{10} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{10}.
 \end{aligned}$$

Задание 2. Упростить выражение: $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} \div \sqrt[7]{a^7b^3}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Решение: } \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} \div \sqrt[7]{a^7b^3} &= \sqrt[3 \cdot 4 \cdot 6]{a^{2 \cdot 4 \cdot 6} b^{2 \cdot 6 \cdot 1}} \div \sqrt[7]{a^7 b^3} = \\
 &= \sqrt[12]{a^8 \cdot a^3 b^6 \cdot a^{10} b^2} \div \sqrt[7]{a^7 b^3} = \sqrt[12]{a^8 \cdot a^3 b^6 \cdot a^{10} b^2} \div \sqrt[7]{a^7 b^3} = \\
 &= \frac{\sqrt[12]{a^{21} b^8}}{\sqrt[8]{a^7 b^3}} = \frac{\sqrt[12 \cdot 2]{a^{21} b^8}}{8 \cdot \sqrt[8]{a^7 b^3}} = \frac{\sqrt[24]{a^{42} b^{16}}}{\sqrt[24]{a^{21} b^9}} = \sqrt[24]{\frac{a^{42} b^{16}}{a^{21} b^9}} = \sqrt[24]{a^{21} b^7}.
 \end{aligned}$$

Задание 3. Найти значение выражения: $\frac{5 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}} + \frac{5 - \sqrt{2}}{5 + \sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Решение: } \frac{5 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}} + \frac{5 - \sqrt{2}}{5 + \sqrt{2}} &= \frac{(5 + \sqrt{2})^2}{(5 - \sqrt{2})(5 + \sqrt{2})} + \frac{(5 - \sqrt{2})^2}{(5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2})} = \\
 &= \frac{25 + 10\sqrt{2} + 2}{25 - 2} + \frac{25 - 10\sqrt{2} + 2}{25 - 2} = \frac{66}{17}.
 \end{aligned}$$

Задание 4. Найти значение выражения: $\sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - \sqrt{7}}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Решение: } \sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - \sqrt{7}} &= \sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^2} \cdot \sqrt[4]{23 - \sqrt{7}} = \\
 &= \sqrt[4]{(16 + \sqrt{7} + 7) \cdot (23 - \sqrt{7})} = \sqrt[4]{(23 + \sqrt{7})(23 - \sqrt{7})} = \\
 &= \sqrt[4]{23^2 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{529 - 49} = \sqrt[4]{480} = \sqrt[4]{81 \cdot 60} = 3 \sqrt[4]{60}.
 \end{aligned}$$

7. Вынесение множителя из-под корня

Если показатель степени под корнем больше, чем показатель корня,

$$\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a \cdot \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a > 0.$$

Пример. Вынести множитель из-под корня:

$$\text{а) } \sqrt[5]{a^8}; \quad \text{б) } \sqrt{24}; \quad \text{в) } \sqrt[3]{a^{11}b^4}.$$

$$\text{Решение: а) } \sqrt[5]{a^8} = \sqrt[5]{a^5 \cdot a^3} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^3} = a \sqrt[5]{a^3}.$$

$$\text{б) } \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \sqrt[3]{a^{11}b^4} &= \sqrt[3]{a^{11}} \cdot \sqrt[3]{b^4} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a^2} \cdot \sqrt[3]{b^3 \cdot b} = \\ &= \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{b} = a^3 \sqrt[3]{a^2} \cdot b \sqrt[3]{b} = \\ &= a^3 b \sqrt[3]{a^2 b}. \end{aligned}$$

8. Внесение множителя под корень.

Если рациональный множитель стоит перед корнем, то его можно внести под корень. Для этого нужно этот множитель возвести – и в степень корня:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, \text{ если } a \geq 0, b \geq 0.$$

Пример. Внести множитель под корень: а) $3\sqrt[3]{6}$; б) $a^2 \sqrt[5]{b}$.

$$\text{Решение: а) } 3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}.$$

$$\text{б) } a^2 \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^2 b}.$$

Тест

Вариант 1

1. Найди значение корня: $\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$.

а) $1\frac{1}{4}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{21}{32}$; г) $5\frac{55}{64}$.

2. Упрости выражение: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}$.

а) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt[7]{2}$; в) $\sqrt[12]{2}$; г) $\sqrt{2\frac{1}{3}}$.

3. Найди значение выражения:

$$\left(\sqrt{7} - 5\right) \cdot \left(4 + \sqrt{7}\right).$$

а) -1; б) 1; в) 13; г) -29.

4. Внеси множитель под корень:

$$3 \cdot \sqrt{\frac{15}{27}}.$$

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{\frac{5}{3}}$; в) $\sqrt{15}$; г) $\sqrt{3}$.

5. Вынеси множитель из-под корня:

$$\sqrt{28}.$$

а) $2\sqrt{7}$; б) $4\sqrt{7}$; в) $2\sqrt{14}$; г) $4\sqrt{14}$.

Вариант 2

1. Найди значение выражения: $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

а) $\frac{81}{64}$; б) $20\frac{1}{4}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $1\frac{1}{2}$.

2. Упрости выражение: $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$.

а) $\sqrt[5]{7}$; б) $\sqrt[6]{7}$; в) $\sqrt{21}$; г) $\sqrt{2\frac{1}{3}}$.

3. Найди значение выражения:

$$\left(\sqrt{5} - 4\right) \cdot \left(4 + \sqrt{5}\right).$$

а) 9; б) -11; в) 1; г) -1.

4. Внеси множитель под корень:

$$6 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

а) $\sqrt{\frac{9}{2}}$; б) $\sqrt{27}$; в) 3; г) $\frac{3}{2}$.

5. Вынеси множитель из-под корня:

$$\sqrt[3]{54}.$$

а) $3\sqrt[3]{3}$; б) $3\sqrt[3]{2}$; в) $2\sqrt[3]{9}$; г) $2\sqrt[3]{3}$.

Ответы

	1 вариант	2 вариант
1 задание	а) $1\frac{1}{4}$	г) $1\frac{1}{2}$
2 задание	в) $\sqrt[12]{2}$	б) $\sqrt[6]{7}$
3 задание	г) -29	б) -11
4 задание	а) $\sqrt{5}$	б) $\sqrt{27}$
5 задание	а) $2\sqrt{7}$	б) $3\sqrt[3]{2}$

